凸优化的分裂收缩算法选取校正矩阵 M 的一般法则

分裂收缩算法统一框架的预测中

$$\begin{aligned}\tilde{w}^k \in \Omega, \quad \theta(u) - \theta(\tilde{u}^k) &+ (w - \tilde{w}^k)^T F(\tilde{w}^k) \\ &\geq (v - \tilde{v}^k)^T Q(v^k - \tilde{v}^k), \quad \forall\, w \in \Omega. \end{aligned} \qquad (1)$$

其中 Q 不一定对称, 但是 $Q^T + Q$ 正定.

当 Q 不是对称矩阵的时候, 接下来无论采用固定步长的校正还是计算步长的校正, 都要给出一个矩阵 M.

对于这个 M, 要存在正定矩阵 H, 使得

$$HM = Q.$$

最简单的当然是取 $M = Q$, H 为单位矩阵, 但是这往往会影响方法的收敛速度.

我们考虑单位步长的校正, 即根据预测给定的矩阵 Q, 如果用

$$v^{k+1} = v^k - M(v^k - \tilde{v}^k) \tag{2}$$

校正, 矩阵 M 该怎么取.

$$\text{因为需要} \quad HM = Q, \qquad \text{就要有} \quad H = QM^{-1}. \tag{3}$$

因为 H 正定, 它首先必须对称, H 必须是

$$H = QD^{-1}Q^T \tag{4}$$

这种形式, 其中 D 是一个对称正定矩阵. 比照一下 (3) 和 (4), 必须有

$$M^{-1} = D^{-1}Q^T \qquad \text{也就是} \qquad M = Q^{-T}D. \tag{5}$$

考虑由单位固定步长校正

$$v^{k+1} = v^k - Q^{-T}D(v^k - \tilde{v}^k) \tag{6}$$

产生新的迭代点. 利用

$$(v^k - v^*)^T Q(v^k - \tilde{v}^k) \geq (v^k - \tilde{v}^k)^T Q(v^k - \tilde{v}^k),$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\|v^k - v^*\|_H^2 - \|v^{k+1} - v^*\|_H^2 \\
&\quad = \quad \|v^k - v^*\|_H^2 - \|(v^k - v^*) - M(v^k - \tilde{v}^k)\|_H^2 \\
&\quad = \quad 2(v^k - v^*)^T HM(v^k - \tilde{v}^k) - \|M(v^k - \tilde{v}^k)\|_H^2 \\
&\quad \geq \quad (v^k - \tilde{v}^k)^T[(Q^T + Q) - M^T HM](v^k - \tilde{v}^k).
\end{aligned} \tag{7}$$

考察选怎样的 D, 让 矩阵

$$\begin{aligned}
G &= Q^T + Q - M^T HM \\
&= Q^T + Q - [(DQ^{-1}(QD^{-1}Q^T)(Q^{-T}D)] \\
&= Q^T + Q - D.
\end{aligned} \tag{8}$$

因此, 我们建议选择一个可逆正定矩阵 D, 使其满足

$$D \prec Q^T + Q, \tag{9}$$

这样, (6) 中的矩阵 G 就是正定的.就会满足收缩条件

$$\|v^{k+1} - v^*\|_H^2 \le \|v^k - v^*\|_H^2 - \|v^k - \tilde{v}^k\|_G^2. \tag{10}$$

注意到单位步长校正 (5) 是

$$v^{k+1} - v^k = Q^{-T} D(\tilde{v}^k - v^k).$$

我们可以通过求解线性方程组

$$Q^T(v^{k+1} - v^k) = D(\tilde{v}^k - v^k) \tag{11}$$

来实现. 所以, 问题的关键是选择一个矩阵 D, 使得 (8) 成立.